Några uppgifter om lite blandade ekvationer och problemlösning med komplexa tal

1. Lös ekvationerna

   a) $z^2 + 4 = 0$

   b) $z^2 - 4z + 8 = 0$

   c) $2z^2 + 12z + 50 = 0$

   d) $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$

2. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Uppgift nr 4 (1662)
1/0

För vissa komplexa tal z $(z \neq 0)$ gäller att $\operatorname{Re} z = 4 \cdot \operatorname{Im} z$
Ge exempel på ett sådant tal. *Endast svar fordras*

3. Lös ekvationerna

   a) $z + 6\bar{z} = 21 - 10i$

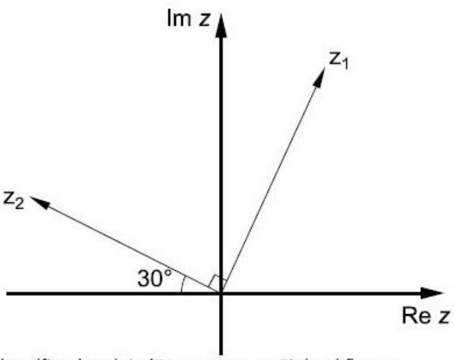
   b) $2z - 3\bar{z} + 6i = -4 + i$

   c) $\frac{1}{\bar{z}} = 4 + 2i$

4. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Uppgift nr 6 (1477)
1/0 , 2/0 , 2/0

För de komplexa talen z_1 och z_2 som är markerade i figuren gäller att $|z_1| = 10$ och $\operatorname{Im} z_2 = 4$



Uppgiften kan inte lösas genom mätning i figuren.

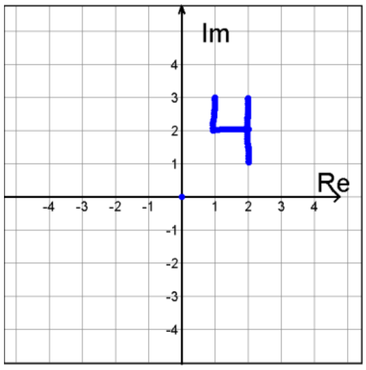
a) Bestäm z_1 på polär form.

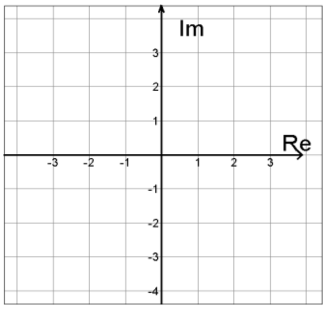
b) Bestäm z_2 på polär form.

c) Beräkna $\frac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + bi$

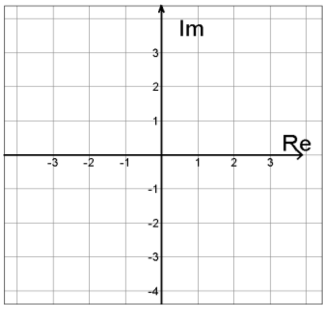
5. Figuren till höger visar ett antal punkter som tillsammans utgör en fyra inritade i ett komplext talplan.

Rita i de tomma figurerna nedan resultatet av punkterna efter beräkningen nedanför figuren.

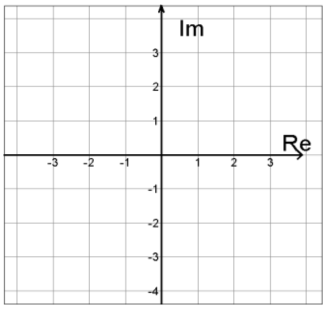




a) $\bar{z}$



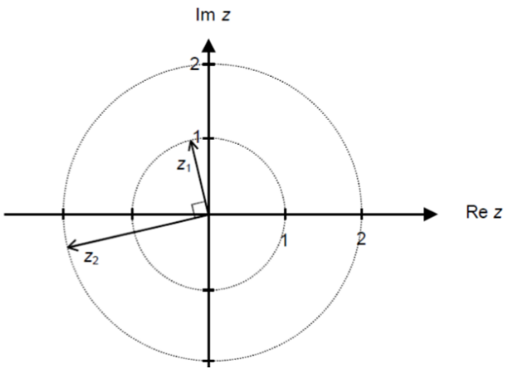
b) $z \cdot i$



c) $\dfrac{\bar{z}}{i}$

6. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

I figuren finns information om de komplexa talen z_1 och z_2
Bestäm z om $z \cdot z_1 = z_2$. Svara på formen $z = a + b\,\mathrm{i}$

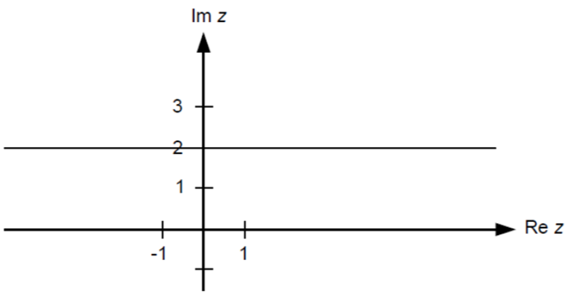


7. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Bestäm z då $|z| = 4$ och $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ (3p)

8. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Talet z ligger på den linje som markerats i det komplexa talplanet nedan.
Vilka värden kan realdelen för z^2 anta? (3p)



9. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{i}$ och $x > 0$ (3p)

Facit - Några uppgifter om lite blandade ekvationer och problemlösning med komplexa tal

1. Lös ekvationerna

   a) $z = \pm 2i$

   b) $z = 2 \pm 2i$

   c) $z = -3 \pm 4i$

   d) Börja med att bryta ut z.
   $z \cdot (z^2 - 10z + 34) = 0$
   Nollproduktstänk ger sedan
   $z_1 = 0$
   $z_{2,3} = 5 \pm 3i$

2. Realdelen ska vara 4 gånger så stor som imaginärdelen, dvs t.ex

   8 + 2i eller 1 + 4i.

3. Skriv talet z som $z = a + bi$ och dess konjugat som $\bar{z} = a - bi$

   a) $(a + bi) + 6(a - bi) = 21 - 10i$
   $7a - 5bi = 21 - 10i$
   Lös realdelsekvationen för sig och imaginärdelsekvationen för sig,
   $7a = 21$ och $-5b = -10$

   Detta ger $z = 3 - 2i$

   b) $2(a + bi) - 3(a - bi) + 6i = -4 + i$
   $-a + 5bi + 6i = -4 + i$
   $-a + (5b + 6)i = -4 + i$
   $-a = -4$ och $5b + 6 = 1$

   Detta ger $z = 4 - i$

   c) $\frac{1}{(a-bi)} = 4 + 2i$
   $\frac{1}{(4+2i)} = a - bi$

   Förläng med konjugatet vid divisionen,
   $\frac{4-2i}{(4+2i)(4-2i)} = a - bi$

   $\frac{4-2i}{20} = a - bi$

   $0{,}2 - 0{,}1i = a - bi$

   Detta ger $z = 0{,}2 + 0{,}1i$

4.

Uppgift nr 6 (1477)

a)
$\arg(z_1) = 60^\circ$
$z_1 = 10(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

SVAR: $z_1 = 10(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

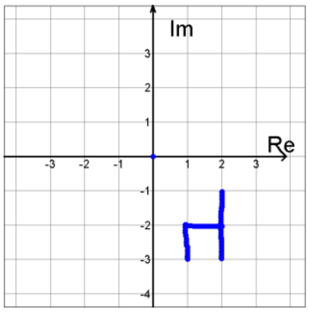
b)
$|z_2| = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8$
$z_2 = 8(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

SVAR: $z_2 = 8(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

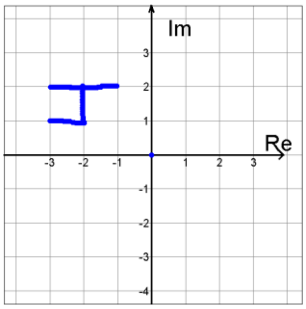
c)
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{8}(\cos(60^\circ - 150^\circ) + i\sin(60^\circ - 150^\circ))$

SVAR: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5i}{4}$

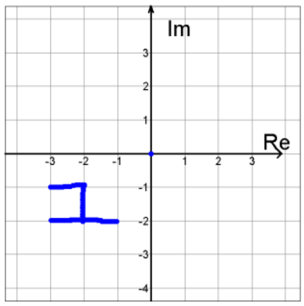
5.



a) $\bar{z}$



b) $z \cdot i$



c) $\frac{\bar{z}}{i}$

6. $z = (2, 90^\circ) = 2i$ (Utgå från att z_1 är talet $z_1 = (1, v)$ Då blir $z_2 = (2, v + 90^\circ)$)

7. (Se fullständig lösning på http://www.thelberg.com/ma4 - uppgift 49)

49

13. **Max 3p**

Redovisad godtagbar metod	+1p
med ett korrekt värde på z	+1p
med ytterligare ett korrekt värde på z ($\pm(\sqrt{8} - \sqrt{8}i)$ eller polär form)	+1p

8. Lös uppgiften ifrån gamla NP nedan.

Korrekt ansats (t.ex. $z^2 = (a + 2i)^2$)	+1p
med identifiering av Re z^2 $(a^2 - 4)$	+1p
med korrekt svar (Re $z^2 \geq -4$)	+1p

9. Se en mer läsbar version av lösningen på http://www.thelberg.com/ma4 - uppgift 47)

Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}i$ och $x > 0$

$\bar{z}$ = konjugatet till z =
= "samma a och b, men tvärtom-tecknet mellan"
$= 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}i$

$z \cdot \bar{z} = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}i\right) \cdot \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}i\right) = \left[\text{Konjugatregeln: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\right] =$
$= (2\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}i\right)^2 = 4x - \frac{1}{x}i^2 = [i^2 = -1] =$
$= 4x + \frac{1}{x}$

Vi vill nu visa att $z \cdot \bar{z} = 4x + \frac{1}{x}$ har minsta värdet = 4 då $x > 0$, dvs ett klassiskt "max/min-problem".

Då söks derivatans nollställen:
$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{x^2} = 0$
$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

x-värdet $-\frac{1}{2}$ är utanför intervallet. Återstår att bekräfta att $x = \frac{1}{2}$ ger minsta värdet 4.
T.ex via andraderivatatestet
$f''(x) = +\frac{1}{x^4} \cdot 2x = \frac{2}{x^3}$
$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} > 0 \Rightarrow$ ∪ f har min. värde för $x = +\frac{1}{2}$

Minsta värdet är $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 + 2 = 4$

Alltså, $f(x) = 4x + \frac{1}{x} = z \cdot \bar{z}$
har minsta värdet 4 då $x > 0 \Rightarrow$
$z \cdot \bar{z} \geq 4$ för alla $x > 0$
VSV.